

FTAMP 30.19.21

Ә.Т. Жақаш<sup>1</sup> – негізгі автор, | ©  
С.Д. Салыбаев<sup>2</sup>, Ә.Б. Саткожаева<sup>3</sup><sup>1</sup>Техн. ғылым. канд., доцент, <sup>2</sup>Техн. ғылым. канд., доцент м.а., <sup>3</sup>Оқытушы

ORCID

<sup>1</sup><https://orcid.org/0000-0001-8685-9868> <sup>2</sup><https://orcid.org/0009-0003-9750-9443><sup>3</sup><https://orcid.org/0009-0009-0519-9323><sup>1</sup>М.Х. Дулати атындағы Тараз университеті, Тараз, Қазақстан<sup>2</sup>Ш. Мұртаза атындағы Халықаралық Тараз университеті, Тараз, Қазақстан<sup>3</sup>Н. Ақшабаев атындағы орта мектеп, Тараз, Қазақстан<sup>1</sup>[zhakash58@mail.ru](mailto:zhakash58@mail.ru)<https://doi.org/10.55956/TNWM4047>

## ФИЗИКАЛЫҚ МАЯТНИКТЕРДІҢ ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУДІҢ ЖОЛДАРЫ

**Аңдатпа.** Физикалық маятниктің қозғалыс моделі қазіргі кезде физика саласында ғана емес, қазіргі заманғы техника мен ғылымда да үлкен маңызға ие. Маятниктің қозғалыс моделін қолданудың негізгі бағыттары: уақытты дәл өлшеу жүйелерінде, яғни бұрын тек механикалық сағаттарда пайдаланылса, бүгінде маятник принципі резонаторлық жүйелердің, синхронды генераторлардың және датчиктердің тұрақтылығын қамтамасыз ету үшін қолданылады. Инженерлік және құрылыс саласында ғимараттардың сейсмотұрақтылығын арттыру мақсатында, көпірлер мен мұнараларда тербелістерін есептеу кезінде, аспалы құрылғылар мен механизмдердегі динамикалық тепе-теңдікті бағалау үшін көп қолданысқа ие. Сонымен қатар, сейсмология және геофизикада жер сілкінісі кезінде маятниктің тербелісі арқылы жер қабатының қозғалысын тіркей алады, яғни, сейсмологиялық деректерді нақты талдауға және жер дүмпулерінің энергиясын есептеуге мүмкіндік береді. Осыған байланысты физикалық маятниктердің жұмысын талдау, оның қолданыс аясын анықтау және қозғалыс түрлерін математикалық тұрғыдан зерттеу өзекті мәселе болып табылады.

**Тірек сөздер:** тербеліс, физикалық маятник, амплитуда, резонанс, период, жиілік, потенциалдық энергия.



Жақаш, Ә.Т. Физикалық маятниктердің қозғалысының математикалық моделі және оларды шешудің жолдары [Мәтін] / Ә.Т. Жақаш, С.Д. Салыбаев, Ә.Б. Саткожаева // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2025. – №4(90). – Б.386-397. <https://doi.org/10.55956/TNWM4047>

**Кіріспе.** Физикалық маятниктің қозғалыс моделі қазіргі кезде физика саласында ғана емес, қазіргі заманғы техника мен ғылымда да үлкен маңызға ие. Маятниктің қозғалыс моделін қолданудың негізгі бағыттары: уақытты дәл өлшеу жүйелерінде, яғни бұрын тек механикалық сағаттарда пайдаланылса, бүгінде маятник принципі резонаторлық жүйелердің, синхронды генераторлардың және датчиктердің тұрақтылығын қамтамасыз ету үшін қолданылады [1]. Инженерлік және құрылыс саласында ғимараттардың сейсмотұрақтылығын арттыру мақсатында, көпірлер мен мұнаралардың

тербелістерін есептеу кезінде, аспалы құрылғылар мен механизмдердегі динамикалық тепе-теңдікті бағалау үшін көп қолданысқа ие.

Тыныштық күйден ауытқыған маятникке ауырлық күші  $G$  әсер етеді дейтін болсақ, топсадағы үйкеліс күшін ескермей отырып,  $G$  күшінің  $x$  осіне қарағандағы күш моментін келесі түрде өрнектейміз [2]:

$$M_x(G) = Gd \sin \varphi, \quad (1)$$

мұндағы:  $d$  – айналу осінен ауырлық ортасына дейінгі арақашықтық. Күш моментінің таңбасының теріс болуы  $G$ -күші денені сағат тілімен бағытталуына байланысты.

Мұнда, қандай да оське қарағанда айналмалы қозғалыс жасайтын дене қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құру үшін келесі теңдеуді қолданамыз:

$$J_x \ddot{\varphi} = \sum M_x(F) \quad (2)$$

мұндағы:  $J_x$  –  $x$  осіне қарағандағы маятниктің инерциялық моменті,  $F$  – әсер ететін күш, бізде  $F = G$ . Онда (2) теңдеуге сәйкес физикалық маятниктің қозғалысының дифференциалдық теңдеуі келесі түрде болады:

$$J_x \ddot{\varphi} = -Gd \sin \varphi$$

Теңдеудің екі жағын да  $J_x$  – инерциялық моментке бөліп жіберсек,

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gd}{J_x \sin \varphi} = 0 \quad (3)$$

(3) теңдеуін физикалық маятниктің дифференциалдық теңдеуі деп атайды.

(3) дифференциалдық теңдеуі – сызықсыз. Мұндай теңдеулерді шешу күрделі мәселе [2]. Сондықтан оны сызықтандыру негізінде  $\sin \varphi \approx \varphi$  деп алайық, яғни  $\varphi$  – бұрышы үлкен емес. Онда (3) теңдеуін келесі түрде жазамыз [3]:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gd}{J_x \varphi} = 0 \quad (4)$$

Жаңа белгілеу енгізсек,  $Gd/J_x = K^2$  немесе  $K = \sqrt{Gd/J_x}$ , мұндағы  $K$  – ны тербелістің жиілігі деп атайды. Онда (4) теңдеуі келесі түрде болады:

$$\ddot{\varphi} + K^2 \varphi = 0 \quad (5)$$

(5) дифференциалдық теңдеуін маятниктің аз ауытқудағы теңдеуі деп атайды. Оның шешімін келесі түрде іздейді:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (6)$$

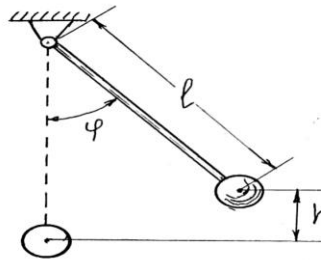
немесе

$$\varphi = A \sin(kt + \beta) \quad (7)$$

мұндағы:  $A$  – маятник тербелісінің амплитудасы,  $\beta$  – тербелістің бастапқы фазасы деп атайды. Ал, тербелістің периодын келесі формуламен анықтайды:

$$T = \frac{2\pi}{k} \quad (8)$$

Ақырлы амплитуда жұмыс істейтін физикалық маятниктің тербелісін қарастырайық. Маятниктің ұзындығын  $L$  деп, вертикальдан ауытқуын  $Y$  деп белгілейік. (1-сурет) қозғалыс мөлшерінің моментінің өзгеруі туралы теореманың негізінде физикалық маятниктің қозғалыс заңдылығының математикалық моделін құрамыз.



Сурет 1. Физикалық маятник

Механикадан белгілі жоғарыдағы теореманы келесі түрде өрнектейміз [4]:

$$\frac{dL_0}{dt} = \sum M_0(F_i),$$

мұндағы  $L_0$  – О нүктесіне қарағандағы қозғалыс мөлшерінің моменті,  $M_0(F_i)$  – А нүктесіне әсер етіп тұрған күштердің О нүктесіне қарағандағы моменті  $L_0 = m\vartheta l = m\varphi l * l = ml^2\varphi$ ,  $M_0(F_i) = -mgl \sin \varphi$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = -mgl \sin \varphi, \quad ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \quad \text{немесе} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Соңғы теңдеуден физикалық маятниктің қозғалысының дифференциалдық теңдеуін аламыз. Онда нүктенің қозғалысын өрнектейтін теңдеудің  $O_{xy}$  фазалық жазықтықта өрнектейтін теңдеулерін төмендегідей жазсақ,

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x,$$

мұндағы:  $x = \varphi, y = \dot{\varphi}$ .

Онда бұл теңдеулер келесі түрде өрнектеледі:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{g}{l} \cos x = h$$

немесе

$$\frac{y^2}{2} = \frac{g}{l} (\cos x - \cos x_0), \quad (9)$$

мұндағы  $x_0$  – маятниктің вертикальдан бастапқы ауытқуы.  $E(x)$  функциясы мен  $h$  тұрақтылары сәйкесінше келесі шамалармен өрнектеледі [5].

$$E(x) = -\frac{g}{l} \cos x; h = -\frac{g}{l} \cos x$$

(9) теңдеулерімен берілген фазалық траекториялар теңдеуін келесі түрде түрлендіріп жазуға болады, яғни:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} &= \frac{g}{l} \left[ 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - \left( 1 - 2\sin^2 \frac{x_0}{2} \right) \right] \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{g}{l} \left( 2\sin^2 \frac{x_0}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{2g}{l} (\sin^2 \frac{x_0}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

Маятниктің толық тербелісінің периодын (9) формуладан ала аламыз, егер мұндағы:

$$h = -\frac{g}{l} \cos x_0, E(x) = -\frac{g}{l} \cos x, \alpha = -x_0, \beta = x_0$$

$$T = 2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{g}{l} (\sin^2 \frac{x_0}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})}} \quad (10)$$

(10) интегралы эллипстік интегралға жататындықтан келесі белгілеулер кіргізейік:

$$\sin \frac{x}{2} = u, \sin \frac{x_0}{2} = ku.$$

Онда стандарттық формаға келтірейік (10) теңдеуі келесі түрге келеді [6].

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

Маятник тербелісінің сызықтық теориясында, яғни тригонометриялық  $\sin \frac{x}{2} \approx \frac{x}{2}, \sin \frac{x_0}{2} \approx \frac{x_0}{2}$  деп сызықтандырсақ, онда (10) формуласынан бастапқы периодты аламыз.

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{x_0^2}{4} - x^2}} = 2 \int_0^{x_0} \frac{2\sqrt{l}dx}{\sqrt{g} \sqrt{x_0^2 - x^2}} = 4 \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \\ &= \frac{4\sqrt{l}}{\sqrt{g}} \arcsin \frac{x}{x_0} \Big|_0^{x_0} = 4 \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}} (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{4\sqrt{l}}{\sqrt{g}} * \frac{\pi}{2} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

**Зерттеу шарттары мен әдістері.** Сызықты тербелістің периоды  $x_0$  бастапқы шартына тәуелді емес, яғни тербеліс амплитудасынан тәуелді емес

деген сөз. Ал, сызықсыз тербелістер теориясында тербеліс периоды амплитудан көп тәуелді болып келеді. Бұл тәуелділікті (10) өрнегіндегі эллипстік интегралды  $k$  дәрежесі бойынша жіктеу арқылы көрсетуге болады [7].

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 k^4 + \dots \right]$$

немесе

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{x_0}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \sin^4 \frac{x_0}{2} + \dots \right] \quad (11)$$

Бұл жіктеуден бастапқы екі мүшесінен шектеліп,

$$\sin^2 \frac{x_0}{2} \approx \frac{x_0^2}{4}$$

деп алсақ, период үшін түзетілген жуықтау формуланы аламыз

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{x_0^2}{16} \right)$$

Мысалы бастапқы ауытқу  $x_0 = 30^\circ$  деп алып көрейік, онда соңғы формула бойынша

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + 0,014) = T_0 (1 + 0,014) = 1,014 T_0$$

Көріп тұрғанымыздай, жоғарыдағы түзетудің тербеліс периодына онша әсерін тигізбейтінін көріп тұрмыз.

Жүйе қозғалысының фазалық суретін алу үшін, жалпы теория бойынша  $(z, x)$  жазықтығында энергетикалық баланс қисықтарын тұрғызамыз (2-сурет)

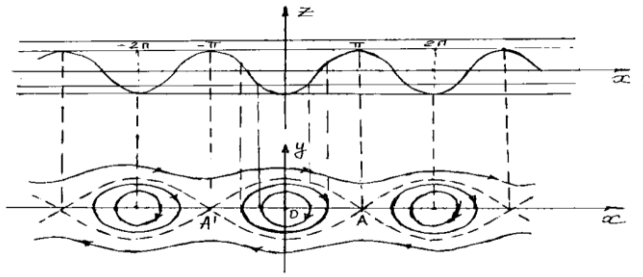
$$z = -\frac{g}{l} \cos x$$

Суреттен көрініп тұрғандай  $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$  нүктелерде оқшаланған минимумы болатын косинусоида. Ал  $x = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$  нүктелерінде максимумы болады [8].

Жүйенің бастапқы толық энергия қоры бастапқы ауытқулармен анықталады және ол келесі шамаға тең

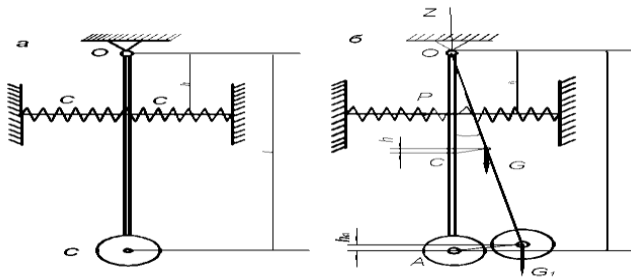
$$h_0 = -\frac{g}{l} \cos x_0$$

фазалық суретке қарап, келесі тұжырымдар жасайық.



Сурет 2. Маятник тербелісінің фазалық суреті

Маятниктің ұзындығы  $l$ , массасы  $m$ -ге тең біртекті жұқа стерженнен және массасы  $m_1$  тең болатын  $A$  жүгінен тұрады (3-сурет).



Сурет 3. Физикалық маятниктің схемасы

Стерженге оның жоғарғы шегінен  $h$  аралықта  $c$  қатаңдық коэффициенттерімен бекітілген қарама-қарсы екі пружина орналасқан. Мақсат маятниктің еркін тербелісінің кіші периоды мен циклдік жиілігін табу керек.

Қарастырылып отырған механикалық жүйенің еркіндік дәрежесі бірге тең. Жалпыланған координаттық жүйе ретінде  $\varphi$  бұрышын алып, маятниктің вертикаль осьтерін белгілейміз. Жүйе ауырлық және серпімділік күштердің ықпалында болады [9].

Тербеліс маятникінің математикалық моделін өрнектейтін дифференциалдық теңдеуін алу үшін, консервативтік жүйе формасындағы екінші ретті Лагранж формуласын қолданамыз [1]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$$

Жүйенің кинетикалық энергиясын  $O_x$  осінің бойымен айналатын және  $T$  кинетикалық энергиясымен  $A$  жүгінің  $T_1$  стерженнің кинетикалық энергиясының қосындысы ретінде анықтаймыз [10].

Формула бойынша

$$T_1 = \frac{1}{2} J_x \bar{\omega}^2$$

Стерженнің момент инерциясының мәнін қойып, мынаны аламыз:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 \bar{\omega}^2 = \frac{1}{6} m l^2 \varphi^2$$

$A$  жүгінің кинетикалық энергиясы

$$T_{11} = \frac{m_1 v_A^2}{2} = \frac{1}{2} m_1 l^2 \bar{\omega}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \varphi^2$$

Жүйенің кинетикалық энергиясы

$$T_{11} = T_1 T_{11} = \frac{1}{6} (m + 3m_1) l^2 \varphi^2,$$

бұдан

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{3} (m + 3m_1) l^2 \varphi \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{3} (m + 3m_1) l^2 \varphi \quad (12)$$

Потенциалдық энергияның қосындысы  $\Pi_E$  потенциалдық энергияның қосындысы бола алатын  $\varphi$  кіші бұрышының тік жағдайында ауытқитын, сәйкесінше, ауырлық және серпімділік күштерімен әсерлесетін маятниктің потенциалдық энергиясын анықтаймыз. Маятниктің потенциалдық энергиясы тік жағдайда нөлге тең [11].

Маятниктің  $\varphi$  бұрышына айналуы кезінде оның бөліктері ауырлық центрінен жоғарғы қозғалысы алынады:

$$h_c = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi)$$

$$h_A = \frac{l}{2} - l \cos \varphi = l(1 - \cos \varphi)$$

$\Pi_1$  потенциалдық энергиясы  $\varphi$  бұрышына айналуы келесі формуламен анықталады:

$$\Pi_1 = G h_c + G_1 h_A = m g \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) + m_1 g l (1 - \cos \varphi)$$

Маятниктің  $\varphi$  бұрышына айналуы кезінде бір пружинасы қысқарады, ал басқасы  $y$  мәнінде созылады және бірінші ретті кіші мәнге тең болады:

$$y = h \sin \varphi, \quad \Pi_{11} = \frac{2cy^2}{2} = ch^2 \sin^2 \varphi$$

$$\Pi_1 = \left( \frac{mgl}{2} + m_1 gl \right) (1 - \cos \varphi); \quad 1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\Pi_1 = gl \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) (1 - \cos \varphi) + ch^2 \sin^2 \varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= gl \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) \sin \varphi + ch^2 2 \sin \varphi \cos \varphi = gl \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) + \\ &+ ch^2 2 \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) = gl \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) = a; \end{aligned}$$

$$2ch^2 = b$$

$$\sin \varphi = \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right); \cos \varphi = \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right)$$

$$a \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) + b \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} - \frac{\varphi^3}{2} + \frac{\varphi^5}{12} \right) = a \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) + b \left( \varphi - \frac{4\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{12} \right) =$$

$$(a+b)\varphi - (a+b)\frac{5\varphi^3}{6} + \frac{b}{12}\varphi^5$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$$

$$\frac{1}{3}(m + 3m_1)l^2\varphi - \left[ (a+b)\varphi - \left( \frac{a+b}{b} \right) \varphi^3 + \frac{b}{12} \varphi^5 \right] = 0$$

$$y = h\varphi.$$

$\Pi_{11}$  потенциалдық энергиясы  $P$  пружина реакциясының жалпы жұмысы маятниктің тіке қозғалатындығын (нөлдік) анықтайды [12].

Формула бойынша

$$\Pi_{11} = 2 \frac{cy^2}{2} = ch^2\varphi^2,$$

Жүйенің барлық потенциалдық энергиясы

$$\Pi_1 = \Pi_1 + \Pi_{11} = gl \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) (1 - \cos \varphi) + ch^2\varphi^2$$

Жүйенің екінші ретті кіші мәнімен шектеліп, мынаны аламыз:

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \approx 2 \left( \frac{\varphi^2}{2} \right) = \frac{\varphi^2}{2}$$

одан

$$\Pi = \frac{gl}{2} \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) + \varphi^2 + ch^2\varphi^2 = \left[ \frac{gl}{2} \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) + ch^2 \right] \varphi^2.$$

$\varphi$  координатасын жалпылай отырып,  $\Pi$  туындысын табамыз:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \left[ gl \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) + 2ch^2 \right] \varphi$$

Табылған өрнектерді Лагранждың екінші ретті теңдеуінің орнына қойып, келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{1}{3}(m + 3m_1)l^2\varphi = - \left[ gl \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) + 2ch^2 \right] \varphi$$

немесе

$$\ddot{\varphi} + \frac{3 \left[ gl \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) + 2ch^2 \right]}{(m+3m_1)l^2} \varphi = 0$$

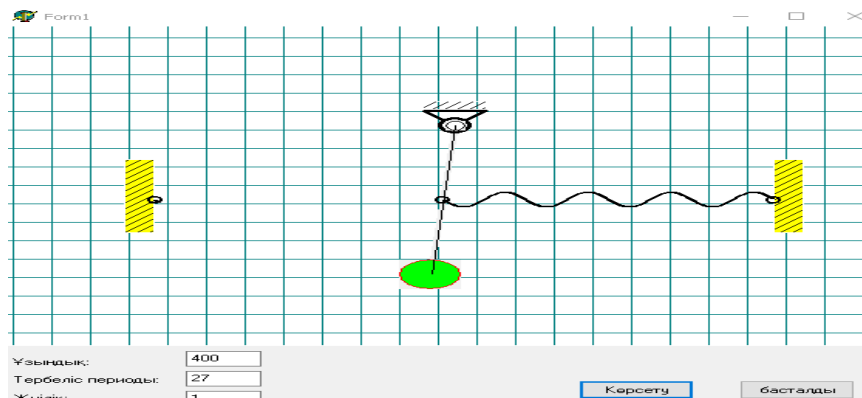
$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$  түрінде алынған теңдеу жүйенің кіші еркіндік тербелісінің дифференциалдық теңдеуі болып табылады. Сол себепті қарастырылған жүйедегі еркіндік тербелісінің циклдік жиілігі мынадай:

$$k = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{3 \left[ gl \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) + 2ch^2 \right]}{(m+3m_1)}}$$

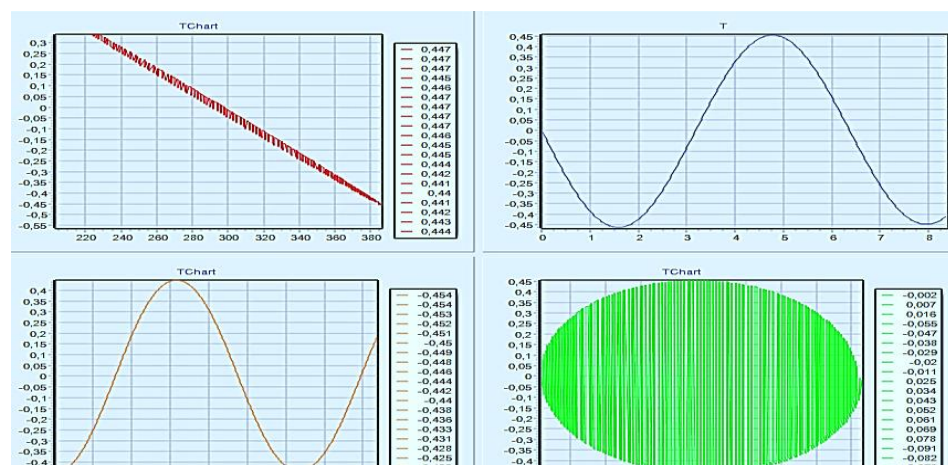
Бұл жүйенің еркіндік тербелісінің периоды

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi l \sqrt{\frac{(m+3m_1)}{3 \left[ gl \left( \frac{m}{2} + m_1 \right) + 2ch^2 \right]}}$$

**Зерттеу нәтижелері және оларды талқылау.** Жүйенің жұмыс істеу процессін бақылау және қажетті параметрлерін анықтау үшін заманауи есептеу әдістері (Delphi 17) негізінде бағдарламалар құрылды. Есептеудің нәтижелерін төмендегі суреттерден көруге болады:



Сурет 4. Маятниктің жұмыс істеу процесінің компьютерлік моделі



Сурет 5. Маятниктің қозғалыс заңдылықтарын анықтайтын графиктер

Бұл бағдарламалар негізінде механикалық жүйенің параметрлерін әртүрлі вариацияда табуға болады.

**Қорытынды.** Жұмыста физикалық маятниктердің қарапайым түрлері және олардың математикалық моделі, ақырлы амплитудада жұмыс істейтін физикалық маятниктің тербелісі, серпімді тиектері бар механизмдер қозғалысына байланысты келесі нәтижелер алынды.

Жұмыста физикалық маятниктердің қарапайым түрлері және олардың математикалық моделі параллель және тізбектей жалғасқан тиектер мен серпімді элементтері қарастырылып, олардың келтірілген қатаңдық коэффициенттері потенциалдық энергиялардың теңдігінен анықталды. Кейбір жағдайлар үшін қатаңдық коэффициенттерінің орнына, оларға кері шама тарқату коэффициенттерін анықтау қарастырылды. Сызықты серпімді тиекті екі массалы динамикалық моделдің қозғалысының математикалық моделі құрылып, оның шешу әдістері келтірілді. Күрделі байланыстардағы физикалық маятниктер, кедергілі ортадағы сызықты серпімді тиектен тұратын механизмнің тербелісі қарастырылды. Бұл жағдайда ортаның кедергісін өрнектейтін  $n$  коэффициентінің әсерін байқаймыз. Динамикалық коэффициенттің ең үлкен мәні  $p = k$  айналасында болатыны дәлелденді.  $n$ -нің әртүрлі мәндерінде сәйкес резонанстық қисықтың графигі алынды. Сонымен қатар серпімді тиектің сызықсыз болғандағы тербеліс қозғалыс заңдылықтары қарастырылды. Амплитудалық- жиіліктік сипаттамалар графиктері алынды.

#### Әдебиеттер тізімі

1. Бабаков, И.М. Теория колебаний [Текст] / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 58 с.
2. Малкин, И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний [Текст] / И.Г. Малкин. – М.: Гостехиздат, 1956. – 172 с.
3. Левитская, О.Н. Курс теории механизмов и машин [Текст] / О.Н. Левитская, Н.И. Левитский. – М., 1978.
4. Пановко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний [Текст] / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
5. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин [Текст] / И.И. Артоболевский. – М., 1975.
6. Жолдасбеков, Ө.А. Машиналар механизмдерінің теориясы [Мәтін] / Ө.А. Жолдасбеков. – Алматы: Мектеп, 1979.
7. Зиновьев, В.А. Курс теории механизмов и машин [Текст] / В.А. Зиновьев. – М., 1972.
8. Винберг, Э.Б. Курс алгебры [Текст] / Э.Б. Винберг. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Факториал Пресс, 2001. – 544 с.
9. Юденич, В.В. Лабораторные работы по теории механизмов и машин [Текст] / В.В. Юденич. – М., 1962.
10. Коренько, А.С. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин [Текст] / А.С. Коренько. – М., 1970.
11. Попов, С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин [Текст] / С.А. Попов, Г.А. Тимофеев. – М., 1998.
12. Фролов, К.В. Теория механизмов и машин [Текст] / К.В. Фролов. – М., 1987.

Материал редакцияға 29.11.25 түсті, 22.12.25 қабылданды.

Ә.Т. Жақаш<sup>1</sup>, С.Д. Салыбаев<sup>2</sup>, Ә.Б. Саткожаева<sup>3</sup><sup>1</sup>Таразский университет им. М.Х. Дулати, Тараз, Казахстан<sup>2</sup>Международный Таразский университет им. Ш.Муртазы, Тараз, Казахстан<sup>3</sup>Средняя школа им. Н. Акшабаева, Тараз, Казахстан**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ МАЯТНИКОВ  
И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ**

**Аннотация.** Модель движения физического маятника в настоящее время имеет большое значение не только в области физики, но и в современной технике и науке. Основные области применения модели движения маятника: в системах точного измерения времени, то есть ранее использовавшихся только в механических часах, сегодня принцип маятника используется для обеспечения устойчивости резонаторных систем, синхронных генераторов и датчиков. В машиностроении и строительстве он широко применяется для повышения сейсмостойкости зданий, при расчёте колебаний мостов и башен, а также для оценки динамического равновесия подвесных устройств и механизмов. Кроме того, в сейсмологии и геофизике колебания маятника позволяют регистрировать движение земной коры во время землетрясения, то есть позволяют проводить точный анализ сейсмологических данных и вычислять энергию землетрясений. Поэтому анализ работы физических маятников, определение области их применения и математическое исследование типов движения являются актуальными задачами.

**Ключевые слова:** колебания, физический маятник, амплитуда, резонанс, период, частота, потенциальная энергия.

A.T. Zhakash<sup>1</sup>, S.D. Salybaev<sup>2</sup>, E.B. Satkozhaeva<sup>3</sup><sup>1</sup>M.Kh. Dulaty Taraz University, Taraz, Kazakhstan<sup>2</sup>International Taraz University named after Sh. Murtaza, Taraz, Kazakhstan<sup>3</sup>Secondary school named after N. Akshabayev, Taraz, Kazakhstan**MATHEMATICAL MODEL OF MOTION OF PHYSICAL PENDULUMS  
AND SOLUTION METHODS**

**Abstract.** The model of physical pendulum motion is currently of great importance not only in physics but also in modern engineering and science. The main areas of application of the pendulum model are: in precision timekeeping systems, previously used only in mechanical clocks, the pendulum principle is now used to ensure the stability of resonator systems, synchronous generators, and sensors. In mechanical engineering and construction, it is widely used to improve the seismic resistance of buildings, to calculate the vibrations of bridges and towers, and to assess the dynamic equilibrium of suspension devices and mechanisms. Furthermore, in seismology and geophysics, pendulum oscillations allow for the recording of crustal movement during an earthquake, thereby enabling the precise analysis of seismological data and the calculation of earthquake energy. Therefore, the analysis of physical pendulums, the determination of their application areas, and the mathematical study of their types of motion are pressing problems.

**Keywords:** oscillations, physical pendulum, amplitude, resonance, period, frequency, potential energy.

---

#### References

1. Babakov, I.M. Teoriya kolebaniy [T Theory of Oscillations ext]. Moscow: Nauka, 1968, 58 p. [in Russian].
2. Malkin, I.G. Nekotorye zadachi teorii nelineynykh kolebaniy [Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations]. Moscow: Gostekhizdat, 1956, 172 p. [in Russian].
3. Levitskaya, O.N., Levitskiy, N.I. Kurs teorii mekhanizmov i mashin [Course of the Theory of Mechanisms and Machines]. Moscow, 1978. [in Russian].
4. Panovko, Ya.G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy [Introduction to the Theory of Mechanical Oscillations]. Moscow: Nauka, 1971, 240 p. [in Russian].
5. Artobolevskiy, I.I. Teoriya mekhanizmov i mashin [Theory of Mechanisms and Machines]. Moscow, 1975. [in Russian].
6. Zholdasbekov, O.A. Mashinalar mekhanizmderinin teoriyasy [Theory of Machine Mechanisms]. Almaty: Mektep, 1979. [in Kazakh].
7. Zinovyev, V.A. Kurs teorii mekhanizmov i mashin [Course of the Theory of Mechanisms and Machines]. Moscow, 1972. [in Russian].
8. Vinberg, E.B. Kurs algebry [Course of Algebra]. 2nd ed., revised and expanded. Moscow: Faktorial Press, 2001, 544 p. [in Russian].
9. Yudenich, V.V. Laboratornye raboty po teorii mekhanizmov i mashin [Laboratory Works on the Theory of Mechanisms and Machines]. Moscow, 1962. [in Russian].
10. Korenyako, A.S. Kursovoe proektirovanie po teorii mekhanizmov i mashin [Course Design in the Theory of Mechanisms and Machines]. Moscow, 1970. [in Russian].
11. Popov, S.A., Timofeev, G.A. Kursovoe proektirovanie po teorii mekhanizmov i mekhanike mashin [Course Design in the Theory of Mechanisms and Machine Mechanics]. Moscow, 1998. [in Russian].
12. Frolov, K.V. Teoriya mekhanizmov i mashin [Theory of Mechanisms and Machines]. Moscow, 1987. [in Russian].