

FTAMP 30.19.33 : 27.35.33

Б.Ж. Сағындықов¹ – негізгі автор, | ©
Қ.С. Таттибеков², Ж. Бимұрат³^{1,2}Физ.-мат. ғылым. канд., қауымдас. профессор, ³PhD, ассистент профессор

ORCID

¹<https://orcid.org/0000-0002-5349-1961> ²<https://orcid.org/0009-0009-5584-9582>³<https://orcid.org/0000-0001-8283-898X>¹Сәтбаев университеті, Алматы, Қазақстан²Алматы технологиялық университеті, Алматы, Қазақстан³Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті,
Алматы, Қазақстан³zh.bimurat@iitu.edu.kz<https://doi.org/10.55956/MODF7974>

АНИЗОТРОПТЫ ЖӘНЕ БІРТЕКТІ ЕМЕС СЫРЫҚТАРДЫҢ БҰРАЛУЫ

Аңдатпа. Анизотропты және біртекті емес сырықтардың бұралуы – материалдың механикалық қасиеттері кеңістіктегі бағытқа тәуелді болатын жағдайдағы күрделі серпімділік есебі. Бұл құбылыс сырыққа әсер ететін бұраушы моменттің әсерінен оның көлденең қималарының өз өсі бойымен бұралуымен сипатталады. Қазіргі заманғы құрылыс, авиация, машина жасау салаларында анизотропты және композиттік материалдар кеңінен қолданылады. Олардың беріктігін, сенімділігін және ұзақ жұмыс істеу қабілетін болжау үшін бұралу кезіндегі әрекет ету сипатын білу қажет. Сондықтан дәстүрлі изотропты материалдар үшін алынған классикалық формулаларды жалпылау қажеттілігі туындайды. Осыған байланысты анизотропты біртекті емес сырықтардың бұралуын зерттеу заманауи механика мен композиттік материалдар теориясында өзекті бағытқа айналды. Аналитикалық тұрғыдан анизотропты бұралу есебі өте күрделі. Сондықтан бұл тақырып жаңа аналитикалық теория мен сандық әдістердің дамуына серпін береді. Мақалада серпімді сырықтың бұралуынан пайда болатын кернеулік функциясы Пуассон теңдеуі арқылы өрнектелетіні көрсетілді. Жұмыста құрамында екінші ретгі аралас дербес туындысы бар Пуассон теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін жаңа жалпыланған комплекс сандар теориясы қолданылды.

Тірек сөздер: анизотропты материалдар, бұралу, бұралу бұрышы, Сен-Венан теориясы, кернеулік функциясы, Пуассон теңдеуі.



Сағындықов, Б.Ж. Анизотропты және біртекті емес сырықтардың бұралуы [Мәтін] / Б.Ж. Сағындықов, Қ.С. Таттибеков, Ж. Бимұрат // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2025. – №4(90). – Б.398-406. <https://doi.org/10.55956/MODF7974>

Кіріспе. Қазіргі заманғы инженерлік есептер мен құрылымдық механика саласында материалдардың анизотроптық қасиеттері мен біртекті еместігіне байланысты туындайтын күрделі деформациялық құбылыстарды зерттеу ерекше өзектілікке ие. Анизотропты және біртекті емес сырықтардың бұралуы – серпімділік теориясының күрделі салаларының бірі, себебі бұл жағдайда серпімді модульдер мен серпімділік қасиеттері кеңістікте координаттарға

тәуелді болады. Мұндай денелердің механикалық әрекет ету сипаты классикалық теорияларға (мысалы, Сен-Венан немесе Прандтль теориялары) толық сәйкес келе бермейді. Сондықтан жұмыста деформация мен кернеулердің таралуын анықтау үшін жаңа жалпыланған комплекс сандар теориясы қарастырылады.

Сырықтардың бұралу теориясының даму тарихы XIX ғасырдың ортасынан басталды. Бұл бағыттың негізін қалаған француз ғалымы А.Ж.-К. Сен-Венан болды. Нақты материалдар изотропты және біртекті бола бермейді. Осы мәселені шешу бағытында кеңестік ғалым С.Г. Лехницкий айрықша үлес қосты [1]. Оның монографиясы осы саладағы негізгі теориялық еңбектердің бірі болып табылады. Лехницкий бұралу кезінде серпімділік сипаттары координаттарға тәуелді болатын жағдайларды қарастырды. Сондай-ақ біртекті емес және анизотропты орта үшін жалпыланған теңдеулерді қорытып шығарды. Қазіргі таңда бұл бағыт жаңа сандық әдістердің дамуы мен композиттік материалдардың кеңінен қолданылуына байланысты қайта өзектілікке ие болды [2-4].

Зерттеу шарттары мен әдістері. Мақалада серпімді сырықтың бұралуынан пайда болатын кернеулік функциясы Пуассон теңдеуі арқылы өрнектелетіні көрсетіледі. Жұмыста құрамында екінші ретті аралас дербес туындысы бар Пуассон теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін жаңа жалпыланған комплекс сандар теориясы қолданылады [5,6]. Анизотропты және біртекті емес материалдардың бұралу есебі классикалық механикада шешімі ең қиын есептердің бірі. Сондықтан тақырыптың өзектілігі жоғары.

I Есептің қойылымы

Көлденең қимасының пішіні эллипс (немесе әртүрлі тұйық контур) болатын серпімді ортотропты сырықты қарастырайық. Сырықтың бір қапталы бекітілсін, ал бос қапталында бұралу моментін туғызатын қос күштер әсер етсін. Сырықтың бүйір беті кернеулерден бос және қапталдың қалай бекітілгендігі қарастырылмайды. Сырықтың бос қапталындағы жазықтықты xOy жазықтығы деп, ал оның жасаушысы қиманың ауырлық центрінен өтетін z өсіне параллель деп ұйғарайық.

Енді анизотропты біртекті емес сырықтың Сен-Венанның жартылай кері әдісіне негізделген таза бұралуының теңдеуін жазайық [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial x} - a_{45} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-a_{45} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{55} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -2. \quad (1.1)$$

мұндағы: $\psi(x, y)$ – бұралудың кернеулік функциясы. Сонда көлденең қимада пайда болатын жанама кернеуліктер кернеулік функциясымен

$$\tau_{xz} = \mathcal{G} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\mathcal{G} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.2)$$

арақатынастары арқылы байланысты. Мұндағы $\mathcal{G}$ тұрақтысы – сырықтың әрбір ұзындық бірлігіне қатысты қиманың бұралу бұрышы немесе

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.3)$$

теңдігі арқылы анықталатын салыстырмалы бұралу бұрышы деп аталады.

Есептің мұндай қойылымында сырық ішіндегі кернеулер мен орын ауыстыру координаттары үзіліссіз және бірімді функциялар болуы тиіс деп санаймыз. Келесі қадамда (1.1) теңдеудің шекаралық шарттарына тоқталайық. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ болғандықтан, сырықтың бүйір бетінде

$$\tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) = 0 \quad (1.4)$$

шарты орындалады. Ал сырықтың бос қапталындағы интегралдық шарттар

$$\iint_{\Omega} \tau_{xz} dx dy = 0, \quad \iint_{\Omega} \tau_{yz} dx dy = 0, \quad \iint_{\Omega} (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dx dy = M \quad (1.5)$$

түрде жазылады, мұнда Ω – көлденең қима.

Ескерту. Жалпы жағдайда (1.1) теңдеу біртекті емес айнымалы коэффициентті екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу.

Мұндай теңдеулердің шекаралық шарттарын қанағаттандыратын аналитикалық дербес шешімін табу мүмкін емес деп айтуға болады. Сондықтан алда деформация коэффициенттері a_{ij} тұрақты шамалар болып келетін дербес жағдайларды қарастырамыз.

1. Егер сырық біртекті түзу сызықты анизотропты болса, онда (1.1) теңдеу біртекті емес тұрақты коэффициентті екінші ретті дербес туындылы сызықтық дифференциалдық теңдеу болады және ол

$$a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2 \quad (1.6)$$

түрде жазылады. Мұндағы a_{44} , a_{45} және a_{55} – материалдың серпімділік тензорының жазық күйдегі редукцияланған компоненттері.

2. Ортотропты сырық үшін (1.6) теңдеу бұдан да ықшам

$$a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{55} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2 \quad (1.7)$$

түрде жазылады, өйткені $a_{45} = 0$.

3. Изотропты біртекті сырық үшін (1.6) теңдеуден

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2G \quad (1.8)$$

түрінде жазылатын Пуассон теңдеуін аламыз, өйткені $a_{44} = a_{55}$ және $G = \frac{1}{a_{44}}$.

Әрі қарай (1.6) теңдеудің характеристикалық теңдеуін құрайық:

$$a_{44} (dy)^2 + 2a_{45} dx dy + a_{55} (dx)^2 = 0.$$

Сырықтың таза бұралу теориясының физикалық мағынасына байланысты $D = a_{45}^2 - a_{44}a_{55} < 0$. Демек (1.6) теңдеу эллиптикалық типке жатады.

II Жалпыланған комплекс сандар және олардың функциялары

Аффиндік координаттар жүйесіне қатысты $M(x, y)$ нүктесінің орны

$$z = x + py \quad (2.1)$$

жалпыланған комплекс саны арқылы бірмәнді түрде бейнеленеді [6], мұнда $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$, $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$. Осыған байланысты жалпыланған комплекс сандар жиыны

$$x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2 - |z|^2 = 0 \quad (2.2)$$

түріндегі квадраттық форманың дискриминантына қатысты эллиптикалық ($D < 0$), гиперболалық ($D > 0$) және параболалық ($D = 0$) сандар жиынына бөлінеді, мұнда $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0$.

Енді (1.6) теңдеудің сызықтық емес жалпы түрін қарастырайық:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \theta_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \theta_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = f(\psi), \quad (2.3)$$

мұнда $\theta_1 = -2\frac{a_{45}}{a_{44}}$, $\theta_0 = \frac{a_{55}}{a_{44}}$, $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 = \frac{a_{45}^2 - a_{44}a_{55}}{a_{44}^2} < 0$. Сырықтың көлденең қимасы $\Omega = f\{x, y | x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2 < 1\}$ түрде берілсін дейік, мұндағы $f(\psi)$ – сыртқы күш. Сонда көлденең қиманың контуры $\gamma: x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2 = 1$ түріндегі әртүрлі пішіндегі эллипс болады, өйткені $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 < 0$. Демек (2.3) теңдеудің шекаралық шарты

$$\psi(x, y)|_{\sqrt{x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2} = 1} = \psi_0 \quad (2.4)$$

түрде анықталады. Одан әрі (2.3) теңдеуді параметрлік әдіспен шешу үшін

$$s = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad s = s(\psi), \quad q = q(\psi) \quad (2.5)$$

белгілеулерін енгізейік. Бұдан

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{ds}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = s \frac{ds}{d\psi}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{dq}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} = q \frac{dq}{d\psi},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = q \frac{ds}{d\psi}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = p \frac{dq}{d\psi} \Rightarrow q \frac{ds}{d\psi} = s \frac{dq}{d\psi}$$

түріндегі теңдіктер арқылы жоғарыдағы арақатынастар анықталады.

Дербес туындылардың бұл өрнектерін (2.3) теңдеуге қоямыз. Нәтижесінде

$$s \frac{ds}{d\psi} + \theta_1 q \frac{ds}{d\psi} + \theta_0 q \frac{dq}{ds} = f(\psi)$$

немесе

$$\frac{d}{d\psi} (s^2 + \theta_1 s q + \theta_0 q^2) = 2f(\psi) \quad (2.6)$$

түріндегі теңдеуге көшеміз.

(2.6) теңдеудің шешімін

$$s^2 + \theta_1 s q + \theta_0 q^2 = 2 \int_{\psi_0}^{\psi} f(\tau) d\tau = \Phi(\psi) \quad (2.7)$$

түрде табамыз. Жоғарыдағы (2.5) белгілеулерді ескере отырып, (2.7) теңдікті

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \theta_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \theta_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 = \Phi(\psi) \quad (2.8)$$

түрінде жазамыз. Одан әрі $U(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \Phi^{\frac{1}{2}}(\tau) d\tau$ функциясын енгізсек, (2.8)

теңдік

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \theta_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) + \theta_0 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = 1 \quad (2.9)$$

түрде жазылады. Бұл тепе-теңдікті қанағаттандыратын функцияларды жалпыланған Эйлер формуласынан аламыз [5,6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = T(\omega) = \cos \sqrt{-D} \omega - \frac{\theta_1}{2\sqrt{-D}} \sin \sqrt{-D} \omega, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{-D}} \sin \sqrt{-D} \omega, \quad D < 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

өйткені $T^2(\omega) + \theta_1 T(\omega) S(\omega) + \theta_0 S^2(\omega) = 1$.

(2.10) жүйенің $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ аралас дербес туындыларын теңестірсек, енгізілген ω бұралы потенциалының фазасына қатысты

$$\omega_x + \left(\sqrt{-D} \tan \sqrt{-D} \omega + \frac{\theta_1}{2} \right) \omega_y = 0 \quad (2.11)$$

түріндегі теңдеу аламыз.

Дербес жағдайда $\theta_1 = 0$, $\theta_0 = 1$ дейік. Сонда $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 = -1$,
 $\tan \omega = -\frac{\omega_x}{\omega_y}$ болады. Соңғы теңдіктен

$$\omega_x \cdot \cos \omega + \omega_y \cdot \sin \omega = (\text{grad } \omega, \text{grad } U) = 0 \quad (2.12)$$

шартын аламыз. Бұл $U(x, y) = \text{const}$ және $\omega(x, y) = \text{const}$ қисықтары өзара ортогональ дегенді білдіреді. Бұл жерде $\frac{\partial U}{\partial x} = \cos \omega$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \sin \omega$.

(2.12) шарт орындалатындай $\omega(x, y)$ функциясын $\omega(x, y) = -2xy$ түрде алайық. Сонда $\frac{\partial U}{\partial x} = \cos 2xy$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -\sin 2xy$ және $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -2x \sin 2xy$,
 $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -2y \cos 2xy$. Бұдан $\tan \omega(x, y) = \frac{y}{x}$ болатыны шығады. Демек

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Бұдан $U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$. Сондықтан $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \theta_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = f(\psi)$ теңдеуінің шешімі

$$\frac{1}{2} \int_{\psi_0}^{\psi} \int_{\psi_0}^{\tau} (f(\tau_1) d\tau_1)^{-1/2} d\tau = \sqrt{x^2 + y^2} = -1$$

түрде анықталады.

Енді бастапқы (1.6) теңдеуге қайта ораламыз да, оны

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \theta_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \theta_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{2}{a_{44}}$$

түрде жазамыз. Сонда анықталмаған коэффициенттер арқылы анықталатын Пуассон теңдеуінің дербес шешімі

$$\psi_*(x, y) = \frac{\theta_0 x^2 - \theta_1 xy + y^2}{2D}$$

түрінде табылады, мұнда $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 < 0$.

Пуассон теңдеуінің жалпы шешімі жалпыланған Лаплас теңдеуінің жалпы шешімі мен Пуассон теңдеуінің дербес шешімінің қосындысынан тұрады. Жалпыланған Лаплас теңдеуі [5-7]

$$\Delta \psi = \frac{1}{-4D} (\theta_0 \psi_{xx} - \theta_1 \psi_{xy} + \psi_{yy}) = 0 \quad (2.13)$$

түрде жазылады. Әрі қарай

$$\xi = x + \frac{\theta_1}{2} y, \quad \eta = \sqrt{-D} y$$

түрлендіруінің көмегімен (2.13) теңдеуді

$$\Delta \psi = \frac{1}{-4D} (\theta_0 \psi_{xx} - \theta_1 \psi_{xy} + \psi_{yy}) = \frac{1}{4} (\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta}) = 0$$

түрінде жаза аламыз. Өз кезегінде

$$\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} = 0 \quad (2.14)$$

түріндегі Лаплас теңдеуінің жалпы шешімін

$$\psi(\xi, \eta) = e^{\xi} (A \sin \eta + B \cos \eta) \quad (2.15)$$

түрінде таба аламыз. Сонда жалпыланған Лаплас теңдеуінің

$$\psi(x, y) = e^{x + \frac{\theta_1}{2} y} (A \sin \sqrt{-D} y + B \cos \sqrt{-D} y) \quad (2.16)$$

жалпы шешімі табылады.

$$\text{Мысал. } \theta_0 = \theta_1 = 2 \text{ дейік. Сонда } D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 = -1 < 0. \text{ Демек } (2.13)$$

жалпыланған Лаплас теңдеуінің жалпы шешімі

$$\psi(x, y) = e^{x+y} (A \sin y + B \cos y)$$

түрде, ал Пуассон теңдеуінің дербес шешімі

$$\psi_*(x, y) = -x^2 + xy - \frac{1}{2} y^2$$

түрінде табылады.

Зерттеу нәтижелері және оларды талқылау. Мақалада аралас дербес туындылары бар екінші ретті тұрақты коэффициентті симметриялық эллиптикалық теңдеулердің жалпы шешімін жаңа «жалпыланған комплекс сандар жүйесіне» көшу арқылы табылатыны көрсетілді.

Жұмыс барысында жалпыланған Коши-Риман шарттарының көмегімен аралас дербес туындылары бар жалпыланған Лаплас теңдеуі құрылды. Содан кейін жалпыланған Эйлер формуласының көмегімен оның жалпы шешімі анықталды.

Қорытынды. Жұмыста анизотропты сырықтың бұралу теңдеуі жалпыланған комплекс сандар теориясы тұрғысынан талданды. Бұл әдіс аналитикалық шешімдер табуға және әртүрлі пішіндегі қималар үшін бұралу бұрышын есептеуге мүмкіндік береді. Келешекте бұл тәсілді сандық әдістермен салыстыра отырып тексеру жоспарлануда.

Әдебиеттер тізімі

1. Лехницкий, С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней [Текст] / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
2. Гузь, А.Н., Малинин, Л.А. Механика анизотропных тел [Текст] / А.Н. Гузь, Л.А. Малинин. – Киев: Наукова думка, 1989. – 512 с.
3. Александров, В.М. Анизотропия и неоднородность в задачах теории упругости [Текст] / В.М. Александров. – М.: Физматлит, 1998. – 464 с.
4. Reddy, I.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. – CRC Press, 2004. – 856 p.
5. Sagyndykov, B.Zh. The concept and application of complex numbers in the system of affine coordinates // Bulletin of the Kazakh National Pedagogical University named after Abai, physical and mathematical series. – 2016. – No. 2(54). – P. 68-74.
6. Сағындықов, Б.Ж. Аффиндік координаталар жүйесіндегі комплекс сандар ұғымы және қолданылуы [Текст] / Б.Ж. Сағындықов // Вестник Казахского Национального педагогического университета имени Абая, серия физико-математическая. – 2016. – № 2(54). – С. 68-74.
7. Сагындыков, Б.Ж. Элементарные функции и условия Коши-Римана обобщенного комплексного переменного [Текст] / Б.Ж. Сагындыков // Вестник Казахского Национального педагогического университета имени Абая, серия физико-математическая. – 2016. – № 2(54). – С. 61-68.

Материал редакцияға 19.10.25 түсті, 26.12.25 қабылданды.

Б.Ж. Сагындыков¹, К.С. Таттибеков², Ж. Бимурат³

¹Satbayev University, Алматы, Казахстан

²Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

³Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

КРУЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Аннотация. Кручение анизотропных и неоднородных стержней представляет собой сложную упругую задачу, в которой механические свойства материала зависят от направления в пространстве. Это явление характеризуется скручиванием его поперечных сечений вдоль своей оси под действием крутящего момента, действующего на стержень. Анизотропные и композиционные материалы широко используются в современном строительстве, авиации и машиностроении. Для прогнозирования их прочности, надежности и длительной эксплуатации необходимо знать характер их поведения при кручении. Поэтому возникает необходимость в обобщении классических формул, полученных для традиционных изотропных материалов. В связи с этим исследование кручения анизотропных неоднородных стержней стало актуальным направлением в современной механике и теории

композиционных материалов. Аналитический расчет анизотропного кручения весьма сложен. Поэтому данная тема дает импульс развитию новой аналитической теории и численных методов. В статье показано, что функция напряжений, возникающая при кручении упругого стержня, выражается уравнением Пуассона. В работе использована новая обобщенная теория комплексных чисел для нахождения общего решения уравнения Пуассона, содержащего смешанную независимую производную второго порядка.

Ключевые слова: анизотропные материалы, кручение, угол закручивания, теория Сен-Венана, функция напряжений, уравнение Пуассона.

B.Zh. Sagindykov¹, K.S. Tattybekov², Zh. Bimurat³

¹*Satbayev University, Almaty, Kazakhstan*

²*Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan*

³*International Information Technology Univeristy, Almaty, Kazakhstan*

TORSION OF ANISOTROPIC AND NON-UNIFORM RODS

Abstract. Torsion of anisotropic and inhomogeneous rods is a complex elastic problem in which the mechanical properties of the material depend on its spatial direction. This phenomenon is characterized by twisting of its cross-sections along their axis under the action of a torque acting on the rod. Anisotropic and composite materials are widely used in modern construction, aviation, and mechanical engineering. To predict their strength, reliability, and long-term service life, it is necessary to understand their behavior under torsion. Therefore, it is necessary to generalize the classical formulas obtained for traditional isotropic materials. In this regard, the study of torsion of anisotropic inhomogeneous rods has become a relevant area in modern mechanics and the theory of composite materials. Analytical calculation of anisotropic torsion is quite complex. Therefore, this topic provides impetus for the development of new analytical theory and numerical methods. This article demonstrates that the stress function arising from the torsion of an elastic rod is expressed by Poisson's equation. This paper uses a new generalized theory of complex numbers to find a general solution to the Poisson equation containing a mixed independent second-order derivative.

Keywords: anisotropic materials, torsion, twist angle, Saint-Venant theory, stress function, Poisson equation.

References

1. Lekhnitskiy S.G. Kruchenie anizotropnyh i neodnorodnyh sterzhnej [Torsion of anisotropic and nonhomogeneous rods]. – Moscow: Nauka, 1971. – 240 p. [in Russian].
2. Guz' A.N., Malinin L.A. Mekhanika anizotropnyh tel [Mechanics of anisotropic bodies]. – Kiev: Naukova dumka, 1989. – 512 p. [in Russian].
3. Aleksandrov, V.M. Anizotropiya i neodnorodnost' v zadachah teorii uprugosti [Anisotropy and inhomogeneity in problems of elasticity theory]. – Moscow: Fizmatlit, 1998. – 464 p. [in Russian].
4. Reddy I.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. – CRC Press, 2004. – 856 p.
5. Sagindykov B.Zh. The concept and application of complex numbers in the system of affine coordinates // Bulletin of the Kazakh National Pedagogical University named after Abai, physical and mathematical series. – 2016. – No.2(54). – P.68-74.
6. Sagindykov B.Zh. Affindik koordinatar zhuiesindegi kompleks sandar ughymy zhane qoldanylyu [Concept and application of complex numbers in the system of affine coordinates] // Bulletin of Kazakh National Pedagogical University named after Abai, physical and mathematical series. – 2016. – No.2. – P.68-74. [in Kazakh].
7. Sagindykov B.Zh. Elementarnye funktsii i usloviya Koshi-Rimana obobshchennogo kompleksnogo peremennogo [Elementary functions and Cauchy-Riemann conditions of generalized complex variable] // Bulletin of Kazakh National Pedagogical University named after Abai, physical and mathematical series. – 2016. – No.2(54). – P.61-68. [in Russian].